静电场的散度和旋度

1. 矢量场的散度和高斯定理

在连续可微的矢量场 A 中，对于包含某一点(x,y,z)的小体积△V，其闭合曲面为 S，定义矢量场 A 通过 S 的净通量与△V 之比

的极限 $$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S A\cdot dS}{\Delta V}=\nabla\cdot A \qquad (1)$$

为矢量场 A 在该点的散度（divergence of A）

它是一个标量. 显然

若 $\Phi=\oint_S A\cdot dS\neq 0$ 则该点散度▽·A ≠ 0，该点就是矢量场 A 的一个源点

若 $\Phi=\oint_S A\cdot dS=0$ 则该点散度▽·A = 0，该点不是矢量场 A 的源点

若所有点上均有 ▽·A = 0，A 就称为无散场.

在直角坐标系中

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}&=(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z})\cdot(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\\&=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned} \qquad (2)$$

高斯定理（Gauss, Theorem）

对任意闭合曲面 S 及其包围的体积 V，下述积分变换成立：

$$\oint_S A\cdot dS=\int_V\nabla\cdot A dV \qquad (3)$$

即，矢量场 A 通过任意闭合曲面 S 的净通量，等于它在 S 所包围的体积 V 内各点散度的积分. 由此可知，若 A 场通过任何闭合曲面的净通量均为零，它就是无散场，即处处有▽ •A = 0. 这意味着，无散场的场线必定是连续而闭合的曲线.

2. 电场的散度方程

大家已经知道，电场的高斯定理是个积分方程

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \tag{4}$$

其中 r 表示电荷密度分布函数. 由高斯积分变换定理(1.7-3)），(1.7-4)的左边可化为 V 内 E 的散度之体积分，因此有

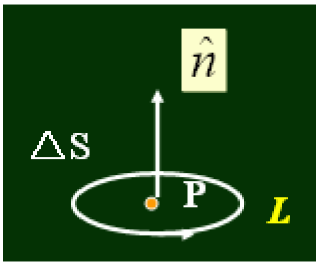
$$\int_V \nabla \cdot E dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

设想体积 V 缩小成包含某点 P（x, y, z）的无限小体积元 dV，便得

$$\nabla \cdot E(x,y,z) = \rho(x,y,z)/\varepsilon_0 \tag{5}$$

这就是电场高斯定理的微分形式——电场的散度方程. 它表示电荷分布点，即 r ≠ 0 的点上▽ •E ≠ 0, 这些点 就是电场的源点.

3. 矢量场的旋度和斯托克斯定理



在连续可微的矢量场 A 中，我们设想将 A 绕着某个很小的闭合路径 L 积分 ，△S=△S$\hat{n}$ 是 L 围成的面积元矢量, 并且约定：

面积元△S 的法向 $\hat{n}$ ，与路径积分绕行方向符合右旋规则.当△S 缩小成某点 P（x,y,z）的无限小邻域，定义如下极限

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}=(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\hat{n}=(\nabla\times\boldsymbol{A})_n \qquad (6)$$

为矢量场 A 的旋度▽×A（curl of A ， rotation of A ）

在 $\hat{n}$ 方向的投影

按上述约定

若（▽×A）n 为正值，则 A 的场线在该点周围形成右手涡旋

若（▽×A）n 为负值，则 A 的场线在该点周围形成左手涡旋

若（▽×A）n =0，A 线在该点不形成涡旋

如果在所有点上均有▽×A =0，则 A 场就称为无旋场

在直角坐标系中，A 的旋度为

$$\begin{aligned}\nabla\times A&=(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z})\times(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\\&=(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{x}+(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{y}+(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{z}\end{aligned} \qquad (7)$$

▽×A 在球坐标和柱坐标系中的表达式，见教材 P855.

斯托克斯定理（Stokes, Theorem）

对任意闭合路径 L 及其围成的曲面 S，下述积分变换成立：

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (8)$$

即,矢量场 A 沿任意闭合路径 L 的环量,等于它在 L 所围的任意曲面 S 上各点旋度的面积分.

由此可知，若矢量场 A 沿任意闭合路径 L 的环量恒为零——保守场，它就是无旋场，即处处有▽×A = 0.

4. 静电场的旋度方程

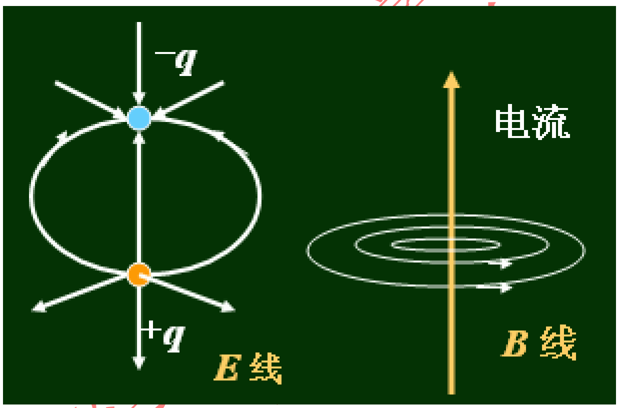
我们知道，静电场是一个保守场，即对任意闭合路径 L ，E 的环量均为零

$$\oint_L E\cdot dl = 0$$ (1.7-9)

据斯托克斯定理（1.7-8)，我们可得到(1.7-9)的微分形式

$\nabla\times E = 0$ (1.7-10)

这表示，静电场是无旋场.如大家所知，静电场的 E 线始发于正电荷，终止于负电荷， E 线无涡旋状的结构磁场线（B 线）则是围绕电流构成闭合的、涡旋状的结构. (1.7-5)和(1.7-10) 是静电场两个基本的微分方程.



静电场的两个基本的微分方程

至此，我们已经得到静电场的两个基本的微分方程：

$$\nabla\cdot E = \rho/\varepsilon_0$$ (1.7-5)

$\nabla\times E = 0$ (1.7-10)

（1）这两个方程分别是静电场的高斯定理

$$\oint_S E\cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

和环路定理

$$\oint_l E \cdot dl = 0$$

的微分形式

（2）这两个方程描述了静电场的有源无旋性质：

电荷分布点是电场的源点

静电场的场线无涡旋状结构